SOLUZIONE

Iniziamo a calcolare la densità e la spinta disponibile alla quota assegnata (z = 9144 m):

$$T_z = T_0 + \alpha \cdot z = 288.15 - 6.5 \times 9.144 = 228.71\,[K]$$

$$\rho_z = \rho_0 \cdot \left(\frac{T_z}{T_0}\right)^{4.256} = 1.225 \times \left(\frac{T_z}{T_0}\right)^{4.256} = 0.458\,[kg/m^3]$$

La spinta disponibile alla quota considerata risulta quindi:

$$T_{d\,z} = T_{d\,0} \cdot \left(\frac{\rho_z}{\rho_0}\right)^{0.824} = 190 \cdot \left(\frac{\rho_z}{\rho_0}\right)^{0.824} = 84.5\,[kN]$$

a) Velocità minima e massima a z = 9144 m

Ipotizziamo che la velocità minima corrisponda alla velocità di stallo Vs. Risulta allora:

$$L = W \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_z V_s^2 \cdot S \cdot C_{L_{\max}} = W$$

$$V_s = \sqrt{\frac{2}{\rho_z} \cdot \frac{W}{S} \cdot \frac{1}{C_{L_{\max}}}} = 89.3\,[m/s]$$

Verifichiamo ora che la spinta necessaria, in corrispondenza di Vs, sia compatibile con quella disponibile.

$$C_{D_S} = C_{D_0} + \frac{C_{L_{\max}}^2}{\pi \cdot \lambda_e} = 0.0733$$

$$\lambda_e = \lambda \cdot K = \frac{b^2}{S} \cdot K$$

Assumendo un coefficiente correttivo K= 0.9 risulta:

$$\lambda_e == \frac{44.84^2}{260} \cdot 0.9 = 6.96$$

$$C_{D_S} = C_{D_0} + \frac{C_{L_{\max}}}{\pi \cdot \lambda_e} \qquad \Rightarrow E_S = \frac{C_{L_{\max}}}{C_{D_S}} = 15.0$$

$$(T_{no})_s = \frac{W}{E_s} = 76.0\,[kN]$$

Risultando quindi la spinta necessaria inferiore a quella disponibile, possiamo confermare che la velocità minima coincide con la velocità di stallo precedentemente calcolata.

La velocità massima si raggiunge quando la spinta disponibile eguaglia la spinta necessaria in volo rettilineo orizzontale uniforme. Risulta quindi:

$$T_d = T_{no} \Rightarrow T_d = \frac{W}{E} \Rightarrow E = \frac{W}{T_d} = 13.5$$

$$\begin{cases} C_D = C_{D_0} + \dfrac{C_L^2}{\pi \cdot \lambda_e} \\ E = \dfrac{C_L}{C_D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{C_L}{E} = C_{D_0} + \dfrac{C_L^2}{\pi \cdot \lambda_e} \\ C_D = \dfrac{C_L}{E} \end{cases}$$

$$\frac{C_L^2}{\pi \cdot \lambda_e} - \frac{C_L}{E} + C_{D_0} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{E^2} - \frac{4 \cdot C_{D_0}}{\pi \cdot \lambda_e} = 0.00219$$

$$C_{L_{1,2}} = \frac{\dfrac{1}{E} \pm \sqrt{\Delta}}{\dfrac{2}{\pi \cdot \lambda_e}} = \begin{cases} C_{L_1} = 0.298 \\ C_{L_2} = 1.32 \end{cases}$$

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\rho_z} \cdot \frac{W}{S} \cdot \frac{1}{C_{L_1}}} = 253\,[m/s]$$

b) angolo di rampa massimo (β max)

Ipotizziamo che l'angolo di rampa sia sufficientemente piccolo da poter assumere:

$$\sin(\beta) \cong \beta \quad (in\ radianti)$$
$$\cos(\beta) \cong 1$$

Risulta quindi:

$$T_d = D + W \cdot \sin(\beta) \cong D + W \cdot \beta$$
$$D = \frac{1}{2}\rho_z V_s^2 \cdot S \cdot C_D \cong T_{no} = \frac{W}{E}$$

In definitiva:

$$\mathrm{T_d} = \frac{W}{E} + W \cdot \beta \Rightarrow \beta = \frac{\mathrm{T_d}}{W} - \frac{1}{E} \Rightarrow \beta_{\max} = \frac{\mathrm{T_d}}{W} - \frac{1}{E_{\max}}$$
$$E_{\max} = \frac{C_{L\ E\max}}{C_{D\ E\max}} = \frac{\sqrt{\pi\lambda_e C_{D_0}}}{2C_{D_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\lambda_e}{C_{D_0}}} = 17.4$$
$$\beta_{\max} = \frac{\mathrm{T_d}}{W} - \sqrt{\frac{4C_{D_0}}{\pi\lambda_e}} = 0.0167\ rad = 0.959\ °$$

c) massimo rateo di salita (v max)

Si adottano le stesse ipotesi fatte al punto b)

$$T_d \cong D + W \cdot \beta$$

si moltiplica tutto per la velocità di volo V:

$$T_d \cdot V = T_{no} \cdot V + W \cdot V \cdot \beta \quad con\ V \cdot \beta \cong v \quad \text{(rateo di salita)}$$
$$T_d \cdot V \cong T_{no} \cdot V + W \cdot v \ \Rightarrow\ v = \frac{T_d \cdot V - T_{no} \cdot V}{W}$$
$$v_{\max} = \frac{(T_d \cdot V - T_{no} \cdot V)_{\max}}{W}$$

Risolvendo per via analitica – introducendo le costanti A e B - si ricava:

$$T_{no} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot \left(C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\lambda_e}\right)$$
$$A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0};\ B = \frac{2}{\rho} \cdot \frac{W^2}{S} \cdot \frac{1}{\pi\lambda_e} \quad \Rightarrow \quad T_{no} = AV^2 + \frac{B}{V^2}$$
$$con\ A = 1.12\,[kg/m]\ e\ B = 9.98 \times 10^8\ [N^2 m/kg]$$
$$v = \frac{T_d \cdot V - \left(AV^3 + \frac{B}{V}\right)}{W} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} \Rightarrow \frac{dv}{dV} = 0$$

$$\frac{dv}{dV}=0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dV}\left[T_d\cdot V-AV^3-\frac{B}{V}\right]=0 \;\Rightarrow\; T_d-3AV^2+\frac{B}{V^2}=0$$

$$T_dV^2-3AV^4+B=0 \;\Rightarrow\; 3AV^4-T_dV^2-B=0$$

$$x=V^2 \;\Rightarrow\; 3Ax^2-T_dx-B=0$$

$$x_{1,2}=\frac{T_d\pm\sqrt{T_d^{\,2}+12AB}}{6A} \;\Rightarrow\; V_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{x_{1,2}}$$

$$\Rightarrow\; V_{RA}=\sqrt{\frac{T_d+\sqrt{T_d^2+12AB}}{6A}}=184\,[m/s]$$

Ricavata la V_{RA} si ricava l'assetto e quindi l'efficienza:

$$C_{L_{RA}}=\frac{2}{\rho}\cdot\frac{W}{S}\cdot\frac{1}{V_{RA}^2} \;\Rightarrow\; C_{D_{RA}}=C_{D0}+\frac{C_{L_{RA}}^2}{\pi\cdot\lambda_e}$$

$$E_{RA}=\frac{C_{L_{RA}}}{C_{D_{RA}}} \;\Rightarrow\; T_{no_{RA}}=\frac{W}{E_{RA}}$$

$$v_{\max}=\frac{T_d\cdot V_{RA}-\frac{W}{E_{RA}}\cdot V_{RA}}{W}=\left(\frac{T_d}{W}-\frac{1}{E_{RA}}\right)\cdot V_{RA}=3.04\,[m/s]$$

d) spinta per la massima distanza percorribile "s max"

Nel turbogetto:

$$s_{\max} \;\Rightarrow\; \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\max} \;\Rightarrow\; C_L=\sqrt{\frac{\pi}{3}\cdot\lambda_e\cdot C_{D_0}}$$

$$C_D=C_{D_0}+\frac{1}{3}C_{D_0}=\frac{4}{3}C_{D_0} \;\Rightarrow\; E_{\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\max}}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{3}\cdot\lambda_e\cdot C_{D_0}}}{\frac{4}{3}C_{D_0}}=15.1$$

$$\left(T_{no}\right)_{s_{\max}}=\frac{W}{E_{\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\max}}}=75.5\,[kN]$$

e) spinta per la massima durata di volo "t max"

Nel turbogetto:

$$t_{\max} \;\Rightarrow\; E=E_{\max}$$

Utilizzando il valore di massima efficienza già calcolato al punto b), risulta:

$$\left(T_{no}\right)_{t_{\max}}=\frac{W}{E_{\max}}=65.5\,[kN]$$

La soluzione presentata può considerarsi come la risposta minima necessaria ai quesiti proposti.

Pietro Bonacci
Docente di Tecnologie Aeronautiche e Laboratorio Tecnologico
ITIS "Feltrinelli" Milano
Vincenzo Mercurio
Docente di Aerotecnica ed Impianti di Bordo ITIS "Feltrinelli" Milano